RCMOS – Revista Científica Multidisciplinar O Saber.
ISSN: 2675-9128. São Paulo-SP.
Ano V, v.2 2025. | submissão: 26/12/2025 | aceito: 28/12/2025 | publicação: 30/12/2025

Aplicação da equação diferencial ordinária, no método de Runge-Kutta: uma revisão sistemática da literatura

Application of the ordinary differential equation in the Runge-Kutta method: a systematic literature review

Danilo Nunes de Souza

Resumo
Este trabalho apresenta uma revisão sistemática da literatura sobre a aplicação do método de Runge-Kutta na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs). As equações diferenciais ordinárias são fundamentais para a modelagem de fenômenos dinâmicos em diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, engenharia e ciências sociais. Diante da dificuldade de obter soluções analíticas para muitas dessas equações, os métodos numéricos, especialmente o de Runge-Kutta, tornam-se ferramentas essenciais. Assim, a sistematização do conhecimento sobre esse método numérico fortalece a base científica e fomenta novas possibilidades de aplicação em áreas estratégicas. Assim o presente estudo tem por objetivo realizar uma revisão sistemática da literatura sobre a aplicação do método de Runge-Kutta na resolução de equações diferenciais ordinárias, com o intuito de identificar os principais contextos de uso, tendências de pesquisa, contribuições científicas e lacunas existentes. Para tanto, empregou-se uma pesquisa de cunho bibliográfico, com destino diferenciado em exploratório e numa abordagem qualitativa. Por fim, o método de Runge-Kutta se configura na equação diferencial ordinária, uma maior facilidades nas aulas de cálculo e os discentes conseguem melhorar as suas respectivas alusões nas disciplinas de níveis superiores na área das exatas.
Palavras- chave: Estudos Científicos, Método de Runge-Kutta, Equações Diferenciais Ordinárias.

Abstract
This paper presents a systematic review of the literature on the application of the Runge-Kutta Method in solving ordinary differential equations (ODEs). Ordinary
differential equations are fundamental for modeling dynamic phenomena in several areas of knowledge, such as physics, biology, engineering and social sciences. Given the difficulty in obtaining analytical solutions for many of these equations, numerical methods, especially the Runge-Kutta method, become essential tools. Thus, the systematization of knowledge about this numerical method strengthens the scientific basis and fosters new possibilities of application in strategic areas. Thus, the present study aims to carry out a systematic review of the literature on the application of the Runge-Kutta Method in solving ordinary differential equations, in order to identify the main contexts of use, research trends, scientific contributions and existing gaps. For this purpose, bibliographic research was used, with a differentiated exploratory and qualitative approach. Finally, the Runge-Kutta method is configured in the ordinary differential equation, providing greater facilities in calculus classes and students are able to improve their respective allusions in higher level subjects in the exact area.
Keywords: Scientific Studies, Runge-Kutta Method, Ordinary Differential Equations.

INTRODUÇÃO

Teoricamente, estudos do método de Runge-Kutta com resolução na equação diferencial ordinária (EDO), são embasados nos mecanismos numéricos que são extremamente úteis na resolução de muitos problemas matemáticos e físicos, que em geral são modelados por equações diferenciais ordinárias e surgem como alternativa para a obtenção de resultados que quase sempre não podem ser obtidos por procedimentos reais. Por sua vez, o método de Runge-Kutta destaca-se com sua precisão e aplicabilidade em uma ampla gama de problemas, desde modelos populacionais até sistemas de controle, circuitos elétricos e dinâmicas não lineares. Sua simplicidade relativa, aliada à eficiência computacional, o torna um dos métodos mais utilizados no ensino e na prática científica. As potencialidades desse método incluem a resolução de problemas complexos com boa estabilidade numérica, além da possibilidade de implementação em softwares computacionais amplamente usados na ciência e na engenharia. O fator de impacto desta investigação se dá justamente na possibilidade de consolidar o conhecimento existente, tornando-o acessível para pesquisadores, professores e estudantes que trabalham com modelagem matemática. Além disso, pode orientar novas pesquisas e aplicações em áreas onde o uso das equações diferenciais ordinárias (EDOs), ainda é emergente ou subexplorado. A relevância científica do tema está no fortalecimento da base teórica e metodológica relacionada à modelagem e simulação de sistemas dinâmicos. Já a relevância social se revela na aplicabilidade prática desse conhecimento, que pode impactar positivamente áreas como saúde pública (modelagem epidemiológica), meio ambiente (simulação de poluição e clima), economia (modelos de previsão), entre outras. Assim, ao contribuir para a otimização e compreensão de processos reais, a pesquisa promove o avanço do conhecimento e o bem-estar social.

PROBLEMÁTICA

Como o método de Runge-Kutta tem sido aplicado na resolução de equações diferenciais ordinárias, segundo a literatura científica disponível, e quais são as principais tendências, contribuições e lacunas identificadas a partir de uma revisão sistemática da literatura?

OBJETIVOS

Objetivo Geral

Realizar uma revisão sistemática da literatura sobre a aplicação do método de Runge-Kutta na resolução de equações diferenciais ordinárias, com o intuito de identificar os principais contextos de uso, tendências de pesquisa, contribuições científicas e lacunas existentes.

Objetivos Específicos

- Mapear os principais trabalhos científicos que aplicam o método de Runge- Kutta na resolução de equações diferenciais ordinárias, destacando áreas do conhecimento e tipos de problemas abordados;
- Analisar as contribuições metodológicas e técnicas presentes na literatura sobre o uso do método de Runge-Kutta, considerando sua evolução e variações (RK2, RK4);
- Identificar lacunas e oportunidades para futuras pesquisas com base nos resultados encontrados, sugerindo novos caminhos para a aplicação e o aprimoramento do método

JUSTIFICATIVA

O interesse por métodos numéricos e sua aplicação em problemas reais motivou a escolha deste tema. A curiosidade em compreender como técnicas como o método de Runge-Kutta são utilizadas na prática científica, bem como a vontade de aprofundar os conhecimentos em equações diferenciais ordinárias (EDOs), impulsionaram o desenvolvimento deste estudo. Além disso, o desejo de contribuir para a sistematização do conhecimento técnico e metodológico sobre o tema reforça o comprometimento com a pesquisa.

Do ponto de vista acadêmico, este estudo é relevante por propor uma revisão sistemática que reúne, organiza e analisa criticamente a produção científica acerca da aplicação do método de Runge-Kutta em equações diferenciais ordinárias (EDOs). Embora amplamente utilizado, o método carece de investigações que consolidem sua aplicação em diferentes contextos científicos. A sistematização desse conhecimento não apenas enriquece a literatura existente, mas também serve de base para futuras pesquisas na área de modelagem matemática, ensino de métodos numéricos e desenvolvimento computacional.

Socialmente, o estudo se justifica por abordar um tema que tem implicações práticas em áreas que impactam diretamente a sociedade, como saúde, meio ambiente, engenharia, economia e educação. A modelagem precisa de fenômenos reais, por meio de equações diferencias ordinárias (EDOs) resolvidas numericamente, contribui para a previsão, controle e melhoria de processos e sistemas. Ao ampliar a compreensão sobre o uso do Método de Runge-Kutta, o trabalho colabora com a formação de profissionais e pesquisadores mais capacitados a atuar em problemas sociais complexos. O avanço tecnológico e a crescente complexidade dos problemas científicos contemporâneos tornam o uso de métodos numéricos cada vez mais necessário. O método de Runge-Kutta continua sendo amplamente utilizado em simulações computacionais modernas, inclusive em áreas emergentes como inteligência artificial, análise de sistemas dinâmicos complexos e modelagens epidemiológicas. A relevância do tema é intensificada pelo aumento da produção científica envolvendo modelagem numérica e pelas demandas por precisão em simulações.

METODOLOGIA

Para a realização desta pesquisa foi executada, segundo o procedimento técnico: pesquisa bibliográfica.

Pesquisa Bibliográfica é o levantamento ou revisão de obras publicadas sobre a teoria que irá direcionar o trabalho científico o que necessita uma dedicação, estudo e análise pelo pesquisador que irá executar o trabalho científico e tem como objetivo reunir e analisar textos publicados, para apoiar o trabalho científico (Sousa; Oliveira, 2024).

Quanto ao objetivo a pesquisa pode ser exploratório por proporcionar maior

familiaridade com o problema, uma vez que busca torna-lo explícito, abrangendo para tanto: levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão. Assume, geralmente, as formas de pesquisas bibliográficas e estudos de casos (Rosa, 2024).

Em relação a abordagem da pesquisa será qualitativa. Pesquisa Qualitativa adequado à consideração da relação dinâmica entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a pertinência de significados que são básicas no processo dessa análise (Alves, 2024).

Nesse sentido, esta revisão de literatura busca uma ampla reflexão e aprofundamento acerca do tema evidenciando a relevância do mesmo para a atualidade. Por se tratar de pesquisa bibliográfica, os estudos feitos são com base em fontes já publicadas, as quais foram: artigos, dissertações, livros, monografias, pesquisas e periódicos.

Ao que diz respeito à bibliografia impressa esta foi examinada e utilizada por meio das doutrinas e livros existentes que abordavam a respeito deste tema, como também por meio da internet, com a pesquisa de páginas na web atuais.

Na análise e interpretação dos resultados foi realizada uma leitura analítica com a finalidade de ordenar e sumariar as informações contidas nas fontes, de forma que estas a obtenção de respostas ao problema da pesquisa.

Foi realizada leitura, estudo e análise das ferramentas e materiais escolhidos, com o objetivo de detectar dados, referências e conhecimentos, indicar relações em meio aos dados adquiridos e avaliar a coerência de tais pesquisas, como também a veracidade de cada uma delas (Pereira, 2021).

APLICAÇÕES CIENTÍFICAS DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA, UM MAPEAMENTO POR ÁREAS E TEMÁTICAS

O método de Runge-Kutta é provavelmente um dos métodos mais populares. O método de Runge-Kutta de quarta ordem também é um dos mais preciosos para obter soluções aproximadas de valor inicial (Vera, 2022).

O método de Runge-Kutta pode usar diferentes coeficientes ou pesos para os cálculos. Assim, pode-se utilizar algoritmos de segunda ordem (RK2) e de quarta ordem (RK4), por exemplo, sendo estes os mais populares (Moreira; Schepke; Cabral, 2022).

Cada método de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo. Isso se deve porque o método de Runge-Kutta pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função (Lopes, 2021).

1.2 Setores Científicos e Modelos Dinâmicos Abordados com o Método de Runge-Kutta

A aplicação do método de Runge-Kutta (RK-1, RK2 e RK-4) como sua eficiência em problemas de circuito RC, circuito LC e movimento em um meio resistivo de equações diferenciais lineares homogêneas com certas condições específicas, mas que também devemos reconhecer que existem outras áreas do ramo da física em que estes se aplicam. Por isso, é possível a aplicação do método de Runge-Kutta para problemas que envolvam, por exemplo, eletromagnetismo, oscilações livres num circuito RL, oscilações livres num circuito LC, como em sistemas da mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana “movimento em um meio resistivo” (Zome, 2023).

De acordo com Zome (2023), o método de Runge-Kutta para equações diferenciais de ordem 4 (RK-4) é um método muito difundido para o cálculo computacional, é nesse método utilizaremos como modelo para a criação do algoritmo no Software Mathematica, e sua formulação geral é:

> yn+1 = yn + h / 6 (k1 + 2k2 + 2k3 + k4), Os métodos numéricos procuram desenvolver processos de cálculo (algoritmos) utilizando uma sequência finita de operações aritméticas básicas, de forma a que certos problemas matemáticos se tornem executáveis. Estes algoritmos envolvem, em geral, um grande número de cálculos aritméticos. Não é pois de estranhar que, nas últimas décadas, com o rápido crescimento das potencialidades dos computadores digitais, o papel dos métodos numéricos na resolução de problemas complexos tenham sofrido grande incremento (Sá, 2024).
> Equações diferenciais ordinárias têm um papel extremamente importante em todas as áreas da Matemática e da Física. Para isso, o método de Runge-Kutta de quarta ordem descreve-se o pêndulo simples com a presença de uma força resistiva através dos seus diagramas de fase nos amortecimentos subcrítico, crítico e supercrítico

(Celeste, 2024).

1.3 Aspectos Metodológicos da Modelagem Matemática com Runge-Kutta: RK2, RK4 e Variações

Entre as muitas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, pesquisas têm mencionado que a abstração da disciplina de cálculo diferencial se mostra um grande desafio, e maior ainda é a sua aplicação e sua importância para outras áreas do conhecimento (Fernandes; Saldanha, 2022). Quanto a essa importância, a modelagem matemática tem um papel norteador em relação ao progresso da ciência, pois sua aplicação está presente em diversas áreas do conhecimento como a física, a química, a biologia, a matemática entre outras. Nessa linha, as equações diferenciais têm sido uma ótima ferramenta na resolução de problemas matemáticos envolvendo as áreas supracitadas e, por conseguinte, ganhou muito destaque no campo da física.

Assim, o presente estudo, cujo tema é equações diferenciais ordinárias na modelagem matemática, que visa destacar a importância da matemática na construção do desenvolvimento de outras ciências da natureza, utilizando como ferramenta chave as principais aplicações de equações diferenciais ordinárias, especificamente as de primeira e segunda ordens na modelagem de fenômenos físicos, despertando o interesse dos acadêmicos para a importância da matemática no desenvolvimento científico (Souza, 2024).

Os contribuintes que precederam Leonardo Euler refinaram seu trabalho e a partir disso produziram ideias novas, não acessíveis ao século XVIII de Euler e

sofisticadas e além do entendimento de uma pessoa. A história das equações diferenciais começa com os precursores do cálculo: Leibniz e Newton. Quando estes matemáticos brilhantes tiveram uma linguagem apropriada e conhecimento suficiente sobre derivadas, logo estas apareceram em equações e esse campo de estudo ganhou notoriedade. Contudo, logo descobriram que as soluções para essas equações não eram tão fáceis. As manipulações e simplificações algébricas ajudaram apenas um pouco. A integral e seu papel teórico no teorema fundamental do cálculo ofereceu ajuda apenas quando as variáveis eram separáveis. O método de separação de variáveis foi generalizado por Leibniz, apesar de ter sido desenvolvido por Jacob Bernoulli (Boyce; Diprima, 2021). Os estudos das equações diferenciais vêm atraindo matemáticos desde quando começaram a ser estudadas por Newton (Boyce; Diprima, 2021).

Oportunidades de Aprimoramento do Método de Runge-Kutta nas Ciências Exatas, Um Olhar para a Matemática e a Física

Anton, Bivens e Davis (2024), descrevem que se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função posição $s(t)$, então sua velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$ instantâneas são dadas pelas equações:

$$v(t) = s'(t) \text{ e } a(t) = v'(t)$$

Ou seja, s(t) é uma antiderivada de v(t) e que v(t) é uma antiderivada de a(t). Assim, temos que:

$$s(t) = \int v(t)dt \text{ e } v(t) = \int a(t)dt$$

Pela fórmula da função velocidade v(t) de uma partícula em movimento retilíneo, então a integração de v(t) produz uma família de funções posição com aquela função velocidade. Se, além disso, soubermos a posição s_0 da partícula em algum instante t_0, então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função posição. Analogamente, se conhecermos a função aceleração a(t) da partícula, então a integração de a(t) produz uma família de funções velocidade com aquela função aceleração. Se, além disso, soubermos a velocidade v_0 da partícula em algum instante t_0, então teremos informação suficiente para encontrar a constante de integração e determinar uma única função velocidade (Anton; Bivens; Davis, 2024, p. 76).

Diversas aplicações de equações diferencias em ensino de matemática e de física. As aplicações foram retiradas dos principais livros de cálculo utilizados nos cursos de graduação e tiveram por objetivo mostrar que é possível inseri-las no contexto da sala de aula e em consequência disso, nortear os alunos na busca da aprendizagem significativa (Souza, 2024).

As tecnologias impulsionaram a mudança do ensino no século XXI e as comunidades escolares passaram a utilizá-las com maior frequência, principalmente nas experiências com os estudos de cálculos diferenciais. No ensino de matemática, cujo processo requer estratégias e recursos de ensino diversos e potencializadores da aprendizagem, é fundamental compreender as ações desenvolvidas por docentes, para melhorar as aquisições dos conhecimentos dos respectivos discentes, em prol no âmbito educacional.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os métodos numéricos de Runge-Kutta (RK) pertencem ao grupo de métodos iterativos, isto é, trata-se de uma técnica que concebe uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando conforme iterações são desempenhadas. O método de RK é possivelmente um dos métodos mais populares, e o de quarta ordem é um dos mais usados para obter soluções aproximadas de valor inicial. Cada método de Runge-Kutta compõe-se em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo (Pereira, 2023).

Os métodos numéricos são um conjunto de aplicações de algoritmos utilizados para formular e resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas. Os algoritmos, por sua vez, são grupos finitos de operações ordenadas nos quais nos permitem resolver certos problemas matemáticos. Trata-se de uma sequência de instruções ou regras estabelecidas que, por meio dessas etapas dadas, permitem-nos aproximar o resultado real de um problema dado (Zome, 2023).

A análise numérica é o estudo de algoritmos que buscam resultados numéricos de problemas das mais diferentes áreas do conhecimento humano, modelados matematicamente (Araújo, 2022).

Uma das aplicações dos métodos numéricos computacionais é a resolução de equações diferenciais, que têm um papel fundamental para toda a Matemática; algumas, muitas vezes, somos incapazes de resolver de maneira analítica, outras, damos por impossíveis (Lyra, 2018).

O Runge-Kuta de quarta ordem é utilizado para encontrar soluções aproximadas de valor inicial. Consiste em comparar um polinômio de Taylor próprio para eliminar o cálculo das derivadas, é feito várias avaliações da função a cada passo. Conhecido como um aperfeiçoamento de Euler, tem uma melhor estativa da derivada da função (Valle, 2024).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente revisão sistemática da literatura teve como objetivo principal investigar como o método de Runge-Kutta tem sido aplicado na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs), a fim de identificar os principais contextos de uso, tendências de pesquisa, contribuições científicas e lacunas ainda existentes. A partir da análise dos trabalhos selecionados, foi possível observar que o método é amplamente empregado em diversas áreas do conhecimento, com destaque para a matemática, física, engenharia, biologia e ciências computacionais. Os contextos de aplicação identificados variam desde a modelagem de sistemas físicos — como movimento de partículas, circuitos elétricos e oscilações mecânicas — até simulações em ecologia, epidemiologia e dinâmica populacional. A variação mais utilizada é o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), dada sua combinação eficiente entre precisão e simplicidade de implementação. No entanto, versões adaptativas e de ordem superior também têm ganhado espaço, especialmente em problemas que exigem controle de erro e otimização de recursos computacionais.

Em termos de contribuições científicas, a literatura revela avanços significativos na personalização e adaptação do método para diferentes classes de EDOs, bem como o desenvolvimento de algoritmos computacionais e softwares que automatizam seu uso. Além disso, observa-se um crescimento na integração do método com outras abordagens, como inteligência artificial, métodos híbridos e simulações multidimensionais. Contudo, a revisão também evidenciou lacunas relevantes. Em especial, há uma carência de estudos que discutam criticamente a escolha do método numérico em relação à natureza específica do problema modelado, bem como a escassez de publicações voltadas para o ensino e popularização do Runge-Kutta no contexto educacional. Além disso, algumas áreas, como ciências ambientais e ciências sociais quantitativas, ainda utilizam pouco esse recurso, indicando oportunidades de expansão e aprofundamento metodológico.

Por fim, este estudo contribui para a sistematização do conhecimento sobre o uso do Método de Runge-Kutta na resolução de EDOs, ao mesmo tempo em que aponta caminhos promissores para futuras pesquisas, tanto no aprimoramento técnico quanto na diversificação de suas aplicações. Acredita-se que esta revisão possa servir de base para novos trabalhos acadêmicos, bem como auxiliar pesquisadores, docentes e estudantes interessados em modelagem matemática e métodos numéricos.

REFERÊNCIAS

ALVES, Laís Hilário. *A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos*. Cadernos da FUCAMP, Uberlândia, v. 20, n. 43, p. 64–83, 2024.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. Porto Alegre: Bookman, 2024.

ARAÚJO, Eduardo. *Métodos numéricos para simulação na engenharia*. Blog ESSS, 2022.

BOYCE, William; DIPRIMA, Richard. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2021.

BUTCHER, J. C. *The non-existence of ten stage eighth order explicit Runge-Kutta methods*.

BIT Numerical Mathematics, v. 25, n. 3, p. 521–540, 1985.

CELESTE, A. T. B. *Uma exposição didática do método de Runge-Kutta no estudo do pêndulo amortecido*. Serra Talhada, 2024.

FERNANDES, D. de S.; SALDANHA, G. *Dificuldades de aprendizagem no nível superior: estudo de caso com graduandos de licenciatura em química*. ENALIC, 2022.

LOPES, M. *Sucessão de apuramentos do método de Runge-Kutta na EDO*. Rio Grande do Sul, 2021.

LYRA, Felipe Palmeira et al. *A importância dos métodos numéricos para a astrofísica*. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2018.

MOREIRA, N. L.; SCHEPKE, C.; CABRAL, A. M. S. *Análise e geração de resultados sobre implementação do método Runge-Kutta em CUDA*. Alegrete: Universidade Federal do Pampa, 2022.

PEREIRA, L. R. *Aplicação do método de Runge-Kutta em sistemas mecânicos*. Serra Talhada, 2023.

PEREIRA, M. F. G. *A aplicação da matemática no cotidiano das pessoas: um estudo bibliográfico*. Patos, 2021.

ROMAIS, R. *Aplicação dos métodos de Euler e de Euler melhorado na resolução de uma equação diferencial ordinária*. NATIVA – Revista de Ciências Sociais do Norte de Mato Grosso, v. 4, n. 1, 2016.

ROSA, M. *Pesquisa qualitativa em educação matemática a distância: aspectos importantes do uso do Playing Game como procedimento metodológico de pesquisa*. Educar em Revista, n. 45, p. 231–258, 2024.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2025.

SÁ, J. V. M. M. *Analisando o pêndulo simples com o método de Runge-Kutta*. Serra Talhada, 2024.

SILVA, A. A. R. *Técnicas de modelagem matemática e os métodos de Runge-Kutta*. Recife, 2021.

SOUSA, Angélica Silva; OLIVEIRA, Guilherme Saramago. *A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos*. Cadernos da FUCAMP, Uberlândia, v. 20, n. 43, p. 64–83, 2024.

SOUZA, L. M. *O uso de equações diferenciais ordinárias na modelagem matemática*. Macapá, 2024.

VALLE, K. N. F. *Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta*. 2024. Monografia (Especialização em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2024.

VERA, A. B. S. *Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta*. Belo Horizonte, 2022.

ZOME, Rogério Souza. *Eficiência do método de Runge-Kutta para resolução de problemas em física*. Serra Talhada, 2023.